

Vibrações em Pavimentos

Recomendações Técnicas de Projecto















Índice

	_	em Pavimentos 1
R	ecomen	dações Técnicas de Projecto 1
S	umário .	3
1	. Intro	dução 4
	1.1.	Geral4
	1.2.	Âmbito 4
	1.3.	Referências 5
	1.4.	Definições 6
		Variáveis, unidades e símbolos 8
2	. Proje	cto de pavimentos sujeitos a vibrações9
	2.1.	Método de verificação9
	2.2.	Métodos de verificação utilizados no projecto 9
		. Método de cálculo manual apoiado em medições 9
		. Método da função de transferência 10
	2.2.3	
3		ificação das vibrações 11
	3.1.	Grandeza de análise
	3.2.	Classes de pavimentos
4		do de cálculo manual
	4.1.	Determinação da frequência natural e da massa modal 13
	4.1.1	
		Fórmulas
		Determinação do amortecimento
	4.3.	Determinação da classe do pavimento
	4.3.1	
^	4.4.	Gráficos OS-RMS ₉₀ para sistemas de um grau de liberdade 16
А		ilo das frequências naturais e massas modais de pavimentos e
	A.1.	turas
		Frequência natural e massa modal de lajes isotrópicas 25
	A.2.	Frequência natural e massa modal para viga
	A.3. A.4.	Frequência natural e massa modal de lajes ortotrópicas 27 Aproximação da frequência natural baseada na deformação devida
	A.5.	próprio
	A.J.	29
	A.6.	Aproximação da massa modal
В	. Exem	nplos
	B.1.	Laje aligeirada com vigas mistas alveolares ACB (edifício de
	escritór	ios)
	B.2.	Edifício de escritórios de 3 pisos



Sumário

A tendência actual de construção de pavimentos de grande esbelteza, formados por grandes vãos, com reduzida espessura, e portanto muito leves, resulta na crescente susceptibilidade à ocorrência de vibrações em condições de serviço. É objectivo do presente documento a apresentação de uma metodologia para o dimensionamento destes pavimentos tendo em conta os efeitos dinâmicos das acções induzidas por peões.

As presentes Recomendações Técnicas têm por âmbito os pavimentos de edifícios residenciais e de escritórios susceptíveis aos efeitos dinâmicos induzidos pela actividade humana, sendo seu propósito a definição de critérios e metodologias a desenvolver no projecto de modo a garantir o conforto dos ocupantes.

Estas Recomendações Técnicas vêm acompanhadas de um Documento Técnico de Base que apresenta métodos alternativos gerais para a determinação da resposta de pavimentos às acções dinâmicas induzidas por peões.

Os modelos teóricos apresentados no presente documento e no Documento Técnico de Base foram estudados e desenvolvidos no âmbito do Projecto RFCS (Research Fund for Coal and Steel), intitulado "Vibrações em Pavimentos". A difusão dos resultados deste Projecto, através do Projecto de Disseminação "Human Induced Vibrations on Steel Structures" (HIVOSS) financiado pelo RFCS permitiu em particular a elaboração de dois documentos finais, um manual de Recomendações Técnicas e um Documento Técnico de Base, traduzidos nesta versão para Português, e que têm por objectivo auxiliar o Projectista na determinação das características dinâmicas mais relevantes dos pavimentos, apoiados em exemplos práticos incluídos nos anexos.



1. Introdução

1.1. Geral

O projecto de pavimentos é efectuado tendo por base estados limite últimos e critérios de conforto em estados limite de utilização:

- Associados aos estados limite últimos estão critérios de resistência e estabilidade;
- Os estados limite de utilização estão essencialmente relacionados com as vibrações e, portanto, são determinados pela rigidez, pela massa, pelo amortecimento e pelos mecanismos de excitação presentes na estrutura.

No caso de estruturas esbeltas, como estruturas metálicas e estruturas mistas, são os critérios de conforto definidos para os estados limite de utilização que condicionam o projecto.

As presentes Recomendações Técnicas têm por objectivo apoiar o projecto:

- Especificando níveis de vibração aceitáveis do ponto de vista de conforto, através da introdução de classes de aceitação e
- Definindo uma metodologia para estimativa da resposta do pavimento às acções humanas, tendo em conta o tipo de utilização esperado.

A estimativa da amplitude de vibração dos pavimentos exige o conhecimento das características dinâmicas destes últimos. Estas características encontram-se também descritas no presente documento, sendo apresentados métodos simplificados para a sua determinação. Exemplos práticos são apresentados no Anexo B destas Recomendações Técnicas.

1.2. Âmbito

As presentes Recomendações Técnicas fornecem uma metodologia simplificada para o projecto e verificação dos pavimentos no que respeita às vibrações induzidas pelas pessoas na sua deslocação no interior de edifícios. São fornecidas especificamente ferramentas de apoio ao projecto e recomendações relativas a níveis de conforto associados à acção de peões em condições normais de utilização dos pavimentos. Não são consideradas vibrações induzidas por outro tipo de acções, como as induzidas por máquinas ou tráfego.

Este documento não é aplicável a pontes pedonais ou outras estruturas cujo comportamento e utilização não sejam comparáveis aos de pavimentos em edifícios.

As presentes recomendações têm por objectivo a detecção e avaliação de níveis de vibração ao nível do projecto de pavimentos.



1.3. Referências

- [1] European Commission Technical Steel Research: Generalisation of criteria for floor vibrations for industrial, office, residential and public building and gymnastic halls, RFCS Report EUR 21972 EN, ISBN 92-79-01705-5, 2006, http://europa.eu.int
- [2] Hugo Bachmann, Walter Ammann. *Vibration of Structures induced by Man and Machines*" IABSE-AIPC-IVBH, Zürich 1987, ISBN 3-85748-052-X
- [3] Waarts, P. *Trillingen van vloeren door lopen: Richtlijn voor het voorspellen, meten en beoordelen.* SBR, September 2005.
- [4] Smith, A.L., Hicks, S.J., Devine, P.J. *Design of Floors for Vibrations: A New Approach.* SCI Publication P354, Ascot, 2007.
- [5] ISO 2631. *Mechanical Vibration and Shock, Evaluation of human exposure to whole-body vibration*. International Organization for Standardization.
- [6] ISO 10371. Bases for design of structures Serviceability of buildings and walkways against vibrations. International Organization for Standardization.



1.4. Definições

As definições apresentadas nesta secção têm por base a aplicação aos pavimentos de que é objecto o presente documento.

Amortecimento D

O amortecimento é caracterizado pela energia de dissipação de um sistema estrutural em vibração. O amortecimento total é dado pela soma dos

- Amortecimentos material e estrutural
- Amortecimento associado aos acabamentos e outros elementos n\u00e3o estruturais (e.g. pavimentos flutuantes)
- Radiação geométrica (propagação de energia através da estrutura)

Massa modal M_{mod} = Massa generalizada

Em determinadas condições, um sistema de múltiplos graus de liberdade pode ser reduzido a um sistema de um grau de liberdade com frequência determinada através de

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_{\text{mod}}}{M_{\text{mod}}}}$$

em que

f representa a frequência natural, expressa em Hz

K_{mod} é a rigidez modal

M_{mod} é a massa modal

A massa modal pode então ser entendida como a massa activada pela vibração com uma determinada configuração modal.

O procedimento para a determinação da massa modal é descrito no capítulo 4.



Frequência	natural	f
	aca.a.	•

O comportamento dinâmico de uma estrutura pode em muitos casos ser descrito através de um conjunto de modos de vibração, em número igual ao número de graus de liberdade utilizados na sua descrição. Cada modo de vibração traduz uma configuração deformada da estrutura e é caracterizado pela duração de tempo T[s], o período da oscilação. A frequência natural f representa o inverso do período (f=1/T) e traduz a frequência de oscilação livre de um sistema que não é continuamente actuado por uma fonte de excitação.

As diferentes frequências naturais de um sistema são em geral ordenadas pela quantidade de energia activada durante a oscilação. Assim a primeira frequência natural é a frequência associada ao mais baixo nível de energia activada durante a oscilação e é portanto aquela que mais provavelmente será activada durante a vibração.

A expressão da frequência natural de um sistema de um grau de liberdade é

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}}$$

em que:

K representa a rigidez

M representa a massa

OS-RMS₉₀

One step RMS- raiz quadrada do valor quadrático médio da aceleração associada a uma passada de um peão, que incorpora a intensidade de oscilação durante uma passada correspondente a 90% das passadas de peões em situação de marcha normal.

OS: "One step"- Uma passada

RMS: Raiz quadrada do valor médio quadrático = valor efectivo da aceleração a:

$$a_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{0}^{T} a(t)^{2} dt} \approx \frac{a_{Peak}}{\sqrt{2}}$$

em que: T é o período de tempo associado à passada.



1.5. Variáveis, unidades e símbolos

а	Aceleração	[m/s²]			
В	Largura	[m]			
f, fi	Frequência natural em estudo	[Hz]			
$\delta(x,y)$	Deslocamento no ponto de coordenadas x,y	[m]			
D	Amortecimento (% do amortecimento crítico)	[-]			
1	Comprimento	[m]			
M_{mod}	Massa modal	[kg]			
M_{total}	Massa total	[kg]			
p	Força distribuída (por unidade de comprimento ou área)	[kN/m] [kN/m²]	ou		
δ	Deslocamento	[m]			
μ	Massa distribuída por unidade de comprimento ou por unidade de área	[kg/m] [kg/m²]	ou		



2. Projecto de pavimentos sujeitos a vibrações

2.1. Método de verificação

As presentes Recomendações apresentam um método simplificado para a verificação de um pavimento às vibrações induzidas pela acção dos peões.

O primeiro passo deste método consiste na determinação das características ou parâmetros do pavimento. Usando estes parâmetros e uma conjunto de gráficos, obtém-se uma quantidade designada por valor 90% rms-"Onestep", que caracteriza a resposta do pavimento à acção dos peões e é comparado com valores recomendados para pavimentos considerando diferentes tipos de utilização. Os três passos do método encontram-se esquematizados na Figura 1. Este método constitui a abordagem simplificada referida neste documento, também designada por método de cálculo manual e é apresentada no parágrafo **Erro! A origem da referência não foi encontrada.**



Figura 1: Método de verificação.

2.2. Métodos de verificação utilizados no projecto

2.2.1. Método de cálculo manual apoiado em medições

O método de cálculo manual pode ser usado também em situações em que as características dinâmicas do pavimento tenham sido obtidas por via



experimental. A determinação experimental das características dinâmicas de pavimentos é discutida em [1] e [3].

2.2.2. Método da função de transferência

As características dinâmicas dos pavimentos podem exprimir-se em termos de funções de resposta em frequência, FRFs, ou funções de transferência. Utilizando então uma descrição estatística das acções devidas aos peões, determina-se o valor OS-RMS₉₀ através de uma análise probabilística. Este método é descrito com maior detalhe em [1] e [3].

O método de cálculo manual constitui na realidade uma versão simplificada do método da função de transferência, em que se realiza uma análise probabilística para determinação do valor OS-RMS₉₀ tendo por base a função de transferência de um sistema clássico de um grau de liberdade, caracterizado por uma massa, uma mola e um amortecedor.

O método da função de transferência pode ser aplicado quando a determinação da resposta do pavimento é efectuada através de modelos de elementos finitos ou por via experimental. Os critérios para aceitação da resposta são os descritos neste documento técnico.

2.2.3. Sobreposição modal

Dois métodos de análise baseados no princípio da sobreposição modal são apresentados nas Recomendações Técnicas do Steel Construction Institute, [4]. O método geral baseia-se na utilização de programas de cálculo automático através de elementos finitos para determinação das características modais dos pavimentos para um conjunto de modos de vibração, aplicando-se de seguida ao pavimento forças devidas às acções dos peões para determinação da resposta, expressa em termos de acelerações. O método simplificado baseia-se num estudo paramétrico usando o método geral, sendo apresentado através de fórmulas analíticas. Contrariamente ao método de cálculo manual, a presente abordagem é determinística e os resultados obtidos são comparáveis directamente com limites definidos em regulamentos internacionais, [5] e [6]. Este método permite iqualmente analisar a actividade humana tendo por base diferentes receptores, o que permite isolar na análise certas zonas críticas do pavimento, como por exemplo as destinadas a blocos operatórios em hospitais. Apresentam-se mais detalhes sobre este método no Documento Técnico da Base.



3. Classificação das vibrações

3.1. Grandeza de análise

A percepção das vibrações pelos utilizadores e o grau de incomodidade proporcionado dependem de vários factores, de que se destacam:

- A direcção da vibração. Neste documento apenas as vibrações verticais são consideradas.
- A postura dos utilizadores: em pé, sentados, ou deitados.
- A actividade dos ocupantes. Por exemplo, a percepção das vibrações de pessoas trabalhando numa unidade industrial é distinta da de pessoas que desenvolvem actividade num escritório.
- A idade e condição de saúde dos ocupantes.

A percepção das vibrações varia igualmente de indivíduo para indivíduo, pelo que a quantificação do grau de incomodidade deve ser efectuada tendo por base as expectativas em termos de conforto definidas para a maioria dos utilizadores.

Refere-se que os níveis de vibração definidos no presente documento dizem respeito exclusivamente ao conforto dos utilizadores, não sendo abordada a questão da integridade estrutural.

Tendo por objectivo o desenvolvimento de um processo geral de caracterização das vibrações induzidas pela acção humana em pavimentos, recomenda-se neste documento a adopção do valor "One-step RMS" (OS-RMS) como grandeza utilizada na caracterização das vibrações. O valor OS-RMS corresponde à vibração causada no pavimento por uma passada padrão.

Atendendo a que o efeito dinâmico da acção humana num pavimento depende de diferentes factores, como o peso e velocidade de deslocação dos peões, o tipo de calçado utilizado, as características de revestimento, etc, recomenda-se a utilização do valor OS-RMS 90% (OS-RMS₉₀) na quantificação das vibrações. Este valor é definido como sendo o correspondente ao percentil de ordem 90 de todos os valores OS-RMS obtidos para um conjunto de cargas representando todas as combinações possíveis de pesos de peões e velocidades de deslocação.

3.2. Classes de pavimentos

Α

Tabela 1 classifica os pavimentos em 6 grupos (A a F), fornecendo igualmente recomendação para as especificações a utilizar em função da utilização esperada.



Tabela 1: Classificação da resposta de pavimentos e recomendação em função da utilização

	OS-RMS ₉₀ Função do pavimento														
	U5-R	(1 ^M) 590		Função do pavimento											
Classe	Limite inferior	Limite superior	Espaço crítico	Saúde	Educação	Residencial	Escritório	Conferência	Retalho	Hotel	Prisão	Industrial	Desporto		
Α	0.0	0.1													
В	0.1	0.2													
С	0.2	8.0													
D	8.0	3.2													
Е	3.2	12.8													
F	12.8	51.2													
	Recomendado Crítico Não recomendado														

Limites de vibração são igualmente definidos pelas normas internacionais ISO 10137[6], referenciadas nos Eurocódigos. Estes limites são reproduzidos na Tabela 2, através do valor limite OS-RMS $_{90}$ equivalente.

Tabela 2: Limites de vibração especificados pela norma ISO 10137 para vibrações contínuas

Local	Tempo	Factor Multiplicativo	OS-RMS ₉₀ equivalente
Áreas de trabalho críticas (ex. blocos operatórios em hospitais,	Dia	1	0.1
laboratórios para ensaios de precisão, etc.)	Noite	1	0.1
Residenciais (ex. apartamentos,	Dia	2 to 4	0.2 to 0.4
moradias, hospitais)	Noite	1.4	0.14
Escritórios, "open space"	Dia	2	0.2
	Noite	2	0.2
Recintos de atendimento público	Dia	4	0.4
(e.g. escolas, serviços)	Noite	4	0.4
Oficinas	Dia	8	0.8
	Noite	8	0.8



Considera-se que os valores limite apresentados na Tabela 2 são desnecessariamente gravosos. Ensaios em diferentes pavimentos mostram que os valores limite apresentados na Tabela 1 são mais adequados (ver [1]).



4. Método de cálculo manual

O método de cálculo manual assume que a resposta dinâmica de um pavimento pode ser representada pela resposta de um sistema de um grau de liberdade. A frequência natural, massa modal e coeficiente de amortecimento podem ser obtidos por cálculo manual como descrito no presente capítulo. Conforme referido anteriormente na secção **Erro!** A origem da referência não foi encontrada., os parâmetros modais podem igualmente ser obtidos por via experimental. Dirigindo-se o presente documento ao projecto de pavimentos em novos edifícios, exclui-se a descrição de técnicas de ensaio.

4.1. Determinação da frequência natural e da massa modal

A determinação das características dinâmicas dos pavimentos pode ser efectuada utilizando métodos de cálculo simples (fórmulas analíticas) ou através de uma análise por elementos finitos (MEF).

Na determinação das características dinâmicas dos pavimentos deve ser incluída na massa correspondente uma fracção realista correspondente às acções variáveis. Valores habituais dessa fracção em edifícios residenciais e de escritórios são de 10% a 20%. Para pavimentos muito leves recomendase igualmente a inclusão da massa de um peão, com um valor representativo mínimo de 30 kg.

4.1.1. Análise por Elementos Finitos

Diferentes programas de elementos finitos podem ser usados em cálculos dinâmicos de pavimentos, e em particular na determinação de frequências naturais e modos de vibração. Muitos destes programas calculam automaticamente a massa modal.

Atendendo a que os elementos utilizados, a modelação do amortecimento e os resultados obtidos dependem do programa de cálculo utilizado, apenas se definem nesta secção regras gerais para realização de análises através de modelos de elementos finitos.

Se o MEF for aplicado no projecto de um pavimento, deve considerar-se que o modelo utilizado nos estudos de vibrações pode diferir substancialmente do modelo utilizado na análise em estados limites últimos (ELU), já que apenas pequenos deslocamentos são esperados devidos à vibração induzida por peões. Um exemplo típico diz respeito à definição das condições de fronteira para estudos de vibrações ou para ELU. Uma ligação que se considera rotulada em ELU pode comportar-se como um encastramento em situação de baixo carregamento, correspondente às acções humanas.

Para o betão, deve considerar-se um módulo de elasticidade dinâmico de valor 10% mais elevado do que o módulo de elasticidade estático tangente E_{cm} .



4.1.2. Fórmulas

Para cálculo manual, apresentam-se no Anexo A fórmulas para a frequência natural e massa modal de lajes isotrópicas, ortotrópicas e vigas.

4.2. Determinação do amortecimento

O comportamento vibratório de um pavimento é fortemente influenciado pelo nível de amortecimento presente. Independentemente do modo de determinação da frequência natural e da massa modal, valores de amortecimento de sistemas vibratórios podem ser determinados com recurso à Tabela 3 para diferentes materiais estruturais, revestimentos e mobiliários. O amortecimento do pavimento D é obtido através da soma dos valores apropriados de D_1 a D_3 .

Tabela 3: Determinação do Amortecimento

Tipo	Amortecimento (% do amortecimento crítico)					
Amortecimento estrutural D ₁						
Madeira	6%					
Betão	2%					
Aço	1%					
Aço-betão	1%					
Amortecimento devido ao mobiliário D ₂						
Escritório tradicional para 1 a 3 pessoas com paredes divisórias	2%					
Escritório sem estantes	0%					
Escritório tipo "open space"	1%					
Biblioteca	1%					
Habitação	1%					
Escolas	0%					
Edifícios para utilização desportiva	0%					
Amortecimento devido a revestimentos D ₃						
Tecto falso	1%					
Pavimento falso	0%					
Pavimento flutuante	1%					
Amortecimento total $D = D_1 + D_2 + D_3$						

4.3. Determinação da classe do pavimento

Determinadas a massa modal e a frequência natural fundamental do pavimento, pode então obter-se o valor OS-RMS₉₀, assim como atribuir-se uma classificação ao pavimento a partir dos diagramas apresentados na secção 4.4. A escolha do diagrama a aplicar deve ser feita tendo por base as características de amortecimento do pavimento nas condições de utilização esperadas (incluindo acabamentos e mobiliário).



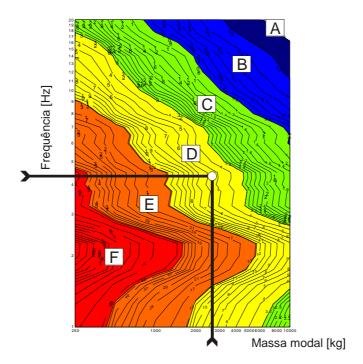


Figura 2: Exemplo de determinação do valor OS-RMS₉₀ e classificação de um pavimento

De acordo com o representado na Figura 2, o valor OS-RMS₉₀ obtém-se da intersecção de linhas paralelas aos eixos dos x e y, passando pela abcissa correspondente ao valor da massa modal e pela ordenada de valor igual à frequência natural, respectivamente. A região do diagrama em que se encontra o ponto acima referido determina igualmente a classificação do pavimento.

4.3.1. Sistemas caracterizados por várias frequências naturais

Em alguns casos, a resposta do pavimento necessita de ser caracterizada pela contribuição em várias frequências naturais. O valor $OS-RMS_{90}$ deve então ser determinado por combinação dos valores $OS-RMS_{90}$ obtidos em correspondência com cada modo de vibração. O procedimento a seguir é o seguinte:

- a) Determinação das frequências naturais;
- b) Determinação da massa modal e amortecimento em correspondência com cada frequência natural;
- c) Determinação do valor OS-RMS₉₀ para cada frequência natural;
- d) Determinar o valor OS-RMS₉₀ total (ou combinado) através de:

$$OS - RMS_{90} = \sqrt{\sum_{i} OS - RMS_{90;i}^{2}}$$

e) Atribuição da classe ao pavimento através da Tabela 1.



4.4. Gráficos OS-RMS₉₀ para sistemas de um grau de liberdade

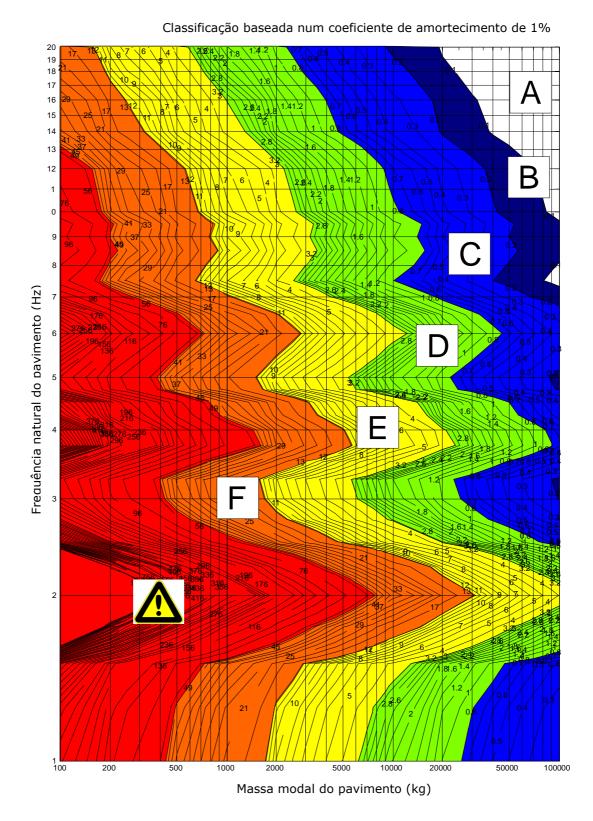


Figura 3: Valor OS-RMS₉₀ para coeficiente de amortecimento de 1%



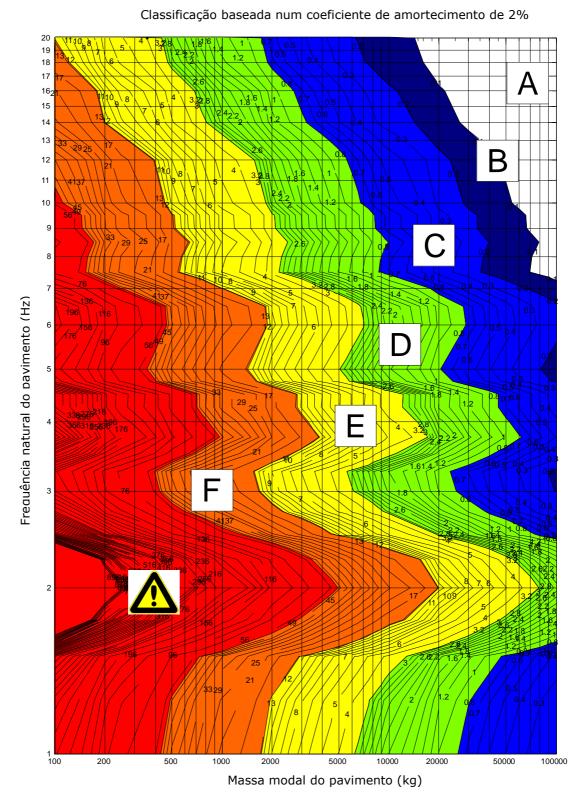


Figura 4: Valor OS-RMS₉₀ para coeficiente de amortecimento de 2%



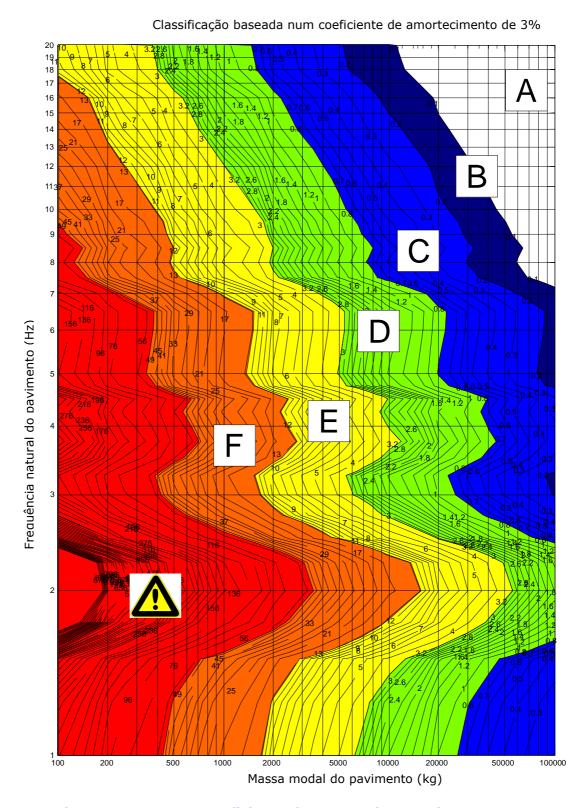


Figura 5: Valor OS-RMS₉₀ para coeficiente de amortecimento de 3%



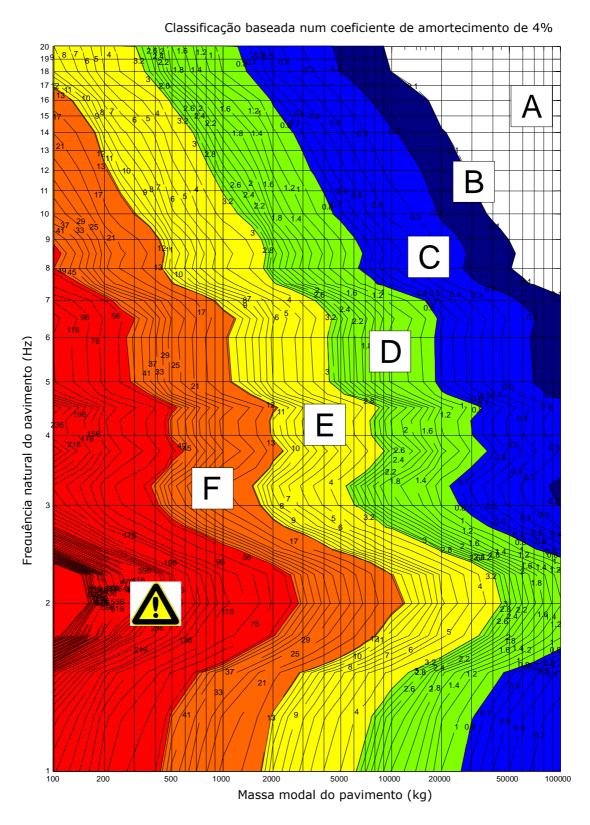


Figura 6: Valor OS-RMS₉₀ para coeficiente de amortecimento de 4%



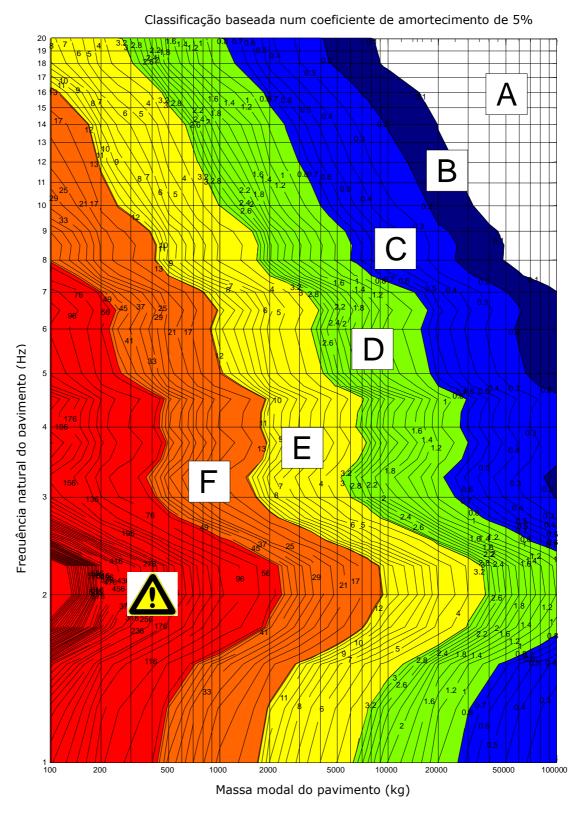


Figura 7: Valor OS-RMS₉₀ para coeficiente de amortecimento de 5%



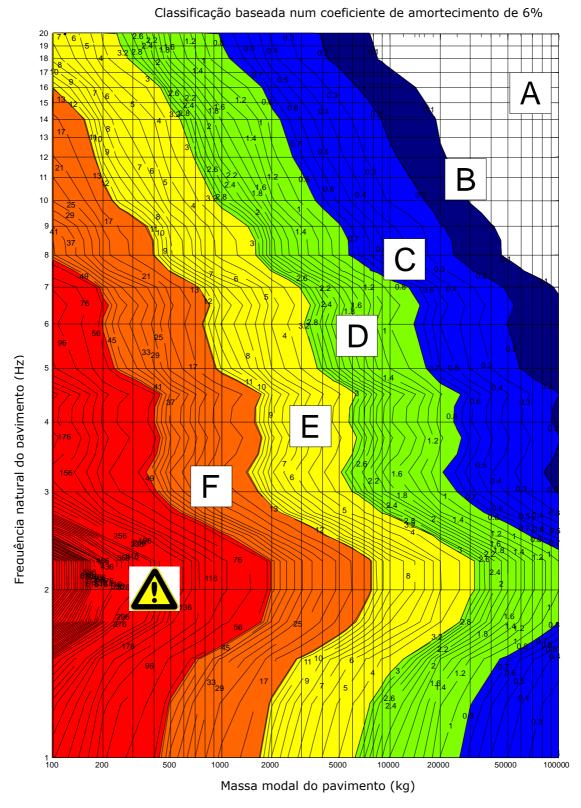


Figura 8: Valor OS-RMS $_{90}$ para coeficiente de amortecimento de 6%



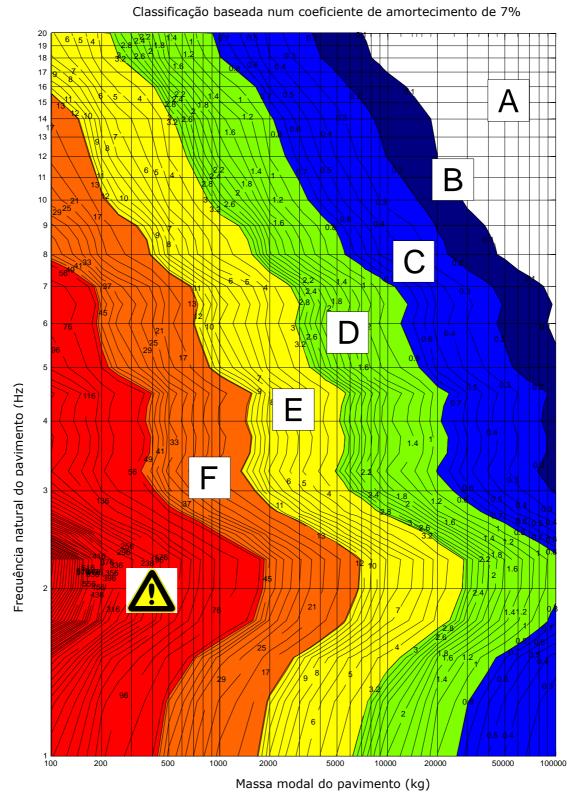


Figura 9: Valor OS-RMS₉₀ para coeficiente de amortecimento de 7%



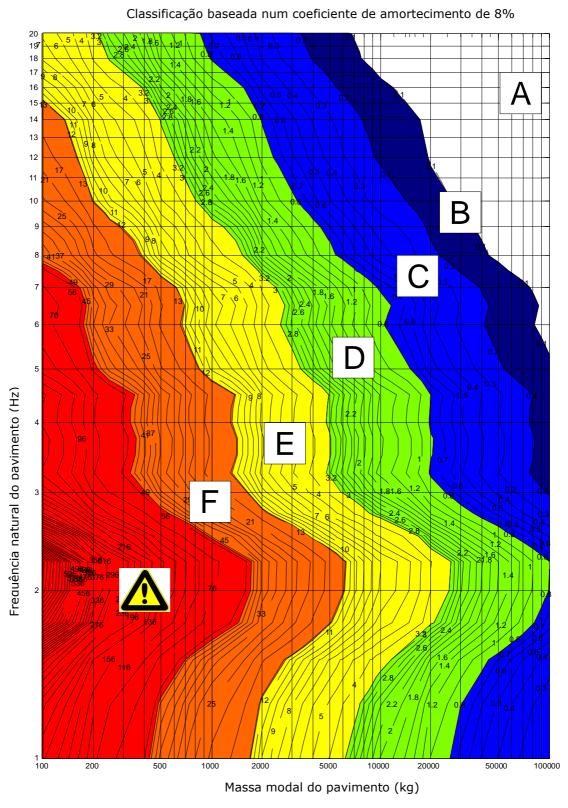
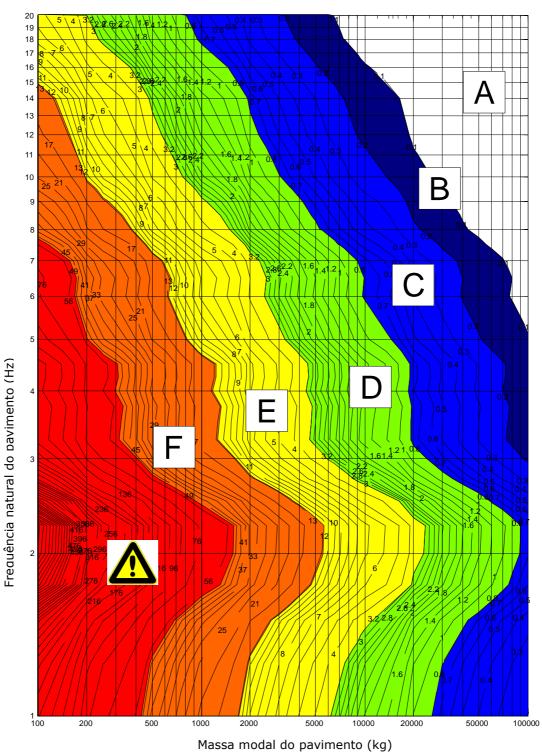


Figura 10: Valor OS-RMS₉₀ para coeficiente de amortecimento de 8%





Classificação baseada num coeficiente de amortecimento de 9%

Figura 11: Valor OS-RMS₉₀ para coeficiente de amortecimento de 9%

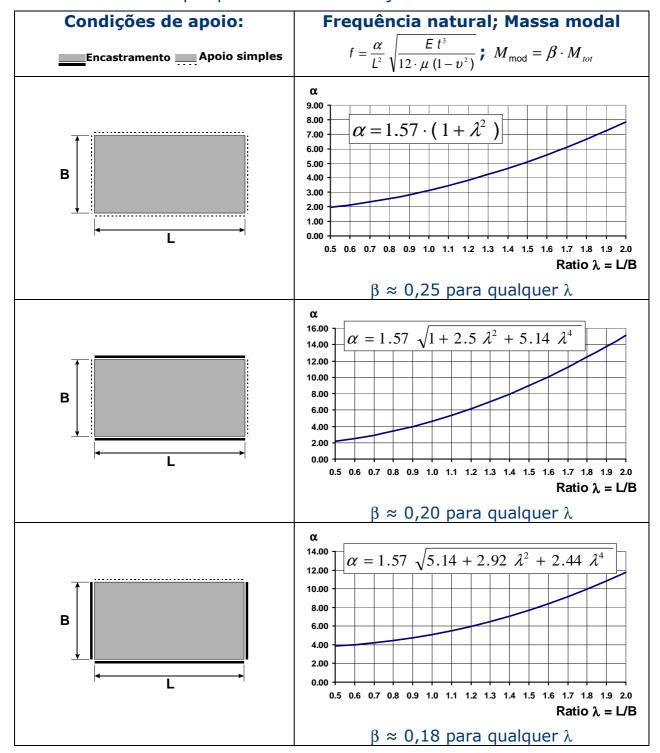


A. Cálculo das frequências naturais e massas modais de pavimentos e estruturas

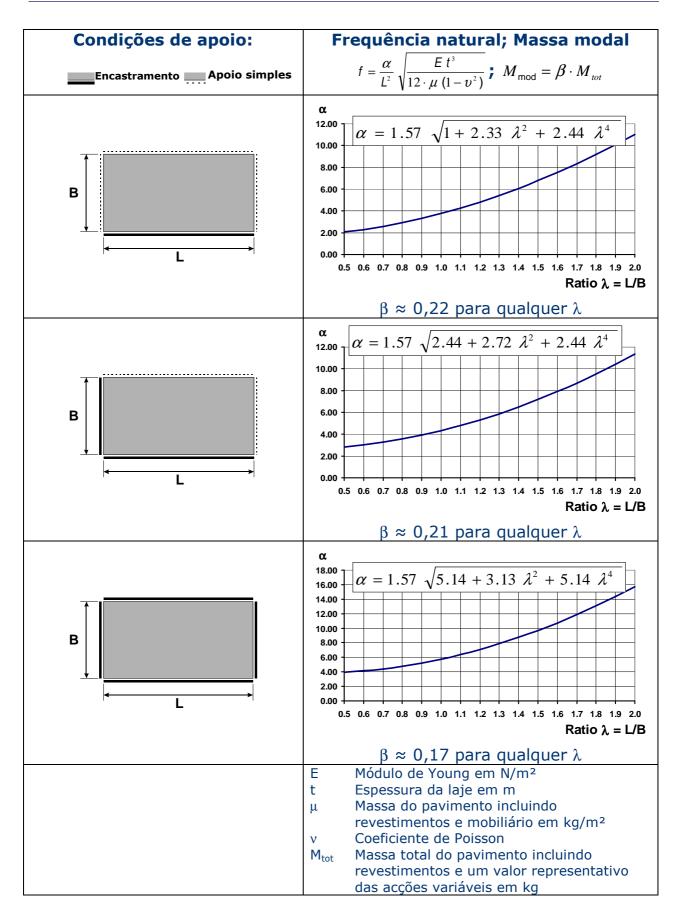
A.1. Frequência natural e massa modal de lajes isotrópicas

A tabela seguinte fornece fórmulas manuais (de acordo com [2]) para a determinação da primeira frequência natural e massa modal de lajes isotrópicas considerando diferentes condições de apoio.

As equações apresentadas têm por base a hipótese de não ocorrência de deslocamentos em qualquer dos bordos da laje.









A.2. Frequência natural e massa modal para viga

A primeira frequência natural de uma viga pode ser determinada, em função das condições de apoio nas extremidades, tendo por base as fórmulas apresentadas na Tabela 4, em que as seguintes quantidades representam:

- E o Módulo de Young [N/m²]
- I o momento de inércia da secção transversal [m⁴]
- μ a massa distribuída [kg/m]
- o comprimento da viga

Tabela 4: Determinação da primeira frequência natural de uma viga

Condições de apoio	Frequência	Massa modal
	natural	
	$f = \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{3EI}{0.37\mu l^4}}$	$M_{mod} = 0.41 \mu l$
<i>ℓ</i>		
<u> </u>	$f = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3EI}{0.2\mu l^4}}$	$M_{\text{mod}} = 0.45 \ \mu \ l$
$\qquad \qquad $	•	
<u>A</u> <u>A</u>	$f = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3EI}{0.49 \mu l^4}}$	$M_{mod} = 0.5 \; \mu \; l$
ℓ		
	$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3EI}{0.24\mu l^4}}$	$M_{\text{mod}} = 0.64 \ \mu \ l$
$\qquad \qquad \ell \qquad \qquad $	·	

A.3. Frequência natural e massa modal de lajes ortotrópicas

Os pavimentos ortotrópicos como, por exemplo, os pavimentos mistos, formados por uma viga disposta segundo a direcção longitudinal e por uma laje de betão na direcção transversal, apresentam diferentes rigidezes nas duas direcções ($\mathrm{EI}_{v}>\mathrm{EI}_{x}$). Um exemplo é apresentado na Figura A. 1.



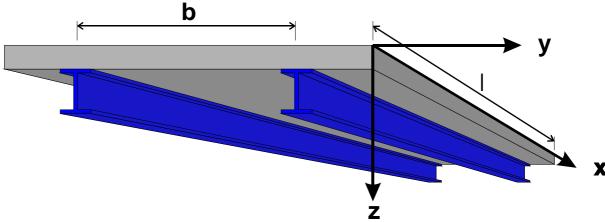


Figura A. 1: Dimensões e eixos de uma laje ortotrópica

A primeira frequência natural de uma laje ortotrópica simplesmente apoiada nos seus quatro bordos pode ser determinada através de:

$$f_{1} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI_{y}}{\mu I^{4}}} \sqrt{1 + \left[2\left(\frac{b}{I}\right)^{2} + \left(\frac{b}{I}\right)^{4}\right] \frac{EI_{x}}{EI_{y}}}$$

em que:

 μ é a massa distribuída do pavimento (kg/m²),

 ℓ é o comprimento do pavimento (m) (na direcção x),

b é a largura do pavimento (m) (na direcção y),

E é o Módulo de Young (N/m²),

 I_x é o momento de inércia da secção para flexão em torno do eixo dos x (m^4),

Iy é o momento de inércia da secção para flexão em torno do eixo dos y (m⁴).

A.4. Aproximação da frequência natural baseada na deformação devida ao peso próprio

A determinação da frequência natural através da deformação devida ao peso próprio constitui uma aproximação muito prática nos casos em que seja conhecida o deslocamento máximo associado ao peso próprio δ_{max} , por exemplo através de um cálculo por elementos finitos.

Este método tem origem na fórmula geral da frequência natural de um sistema de um grau de liberdade: $f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{M}}$

A rigidez *K* pode ser aproximada por:

$$K = \frac{M \cdot g}{\frac{3}{4} \delta_{\text{max}}},$$

em que

M é a massa total do sistema vibratório, $g = 9.81 \frac{m}{c^2}$ é a aceleração da gravidade e



 $\frac{3}{4}\,\delta_{\rm max}$ é o deslocamento médio devido ao peso próprio.

A frequência natural pode então ser aproximada por

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{4 \cdot g}{3 \cdot \delta_{\text{max}}}} = \frac{18}{\sqrt{\delta_{\text{max}}[mm]}}$$

A.5. Fórmula de Dunkerley para aproximação da frequência natural

A fórmula de Dunkerley para determinação da frequência natural é apropriada para o cálculo manual. Aplica-se quando o modo de vibração tem uma configuração complexa, podendo contudo ser dividido num conjunto de modos cujas frequências naturais são dadas por expressões analíticas simples (ver Secções A.1, A.2. e A.3).

A Figura 12 exemplifica este método com o cálculo da frequência natural de um pavimento misto formado por duas vigas simplesmente apoiadas e uma laje de betão armado não apoiada no contorno exterior.

O modo de vibração deste pavimento pode ser decomposto em dois modos de vibração independentes associados a sistemas de um grau de liberdade, e com frequências naturais calculadas separadamente (f_1 para o modo de vibração da laje de betão e f_2 para o modo de vibração da viga mista).

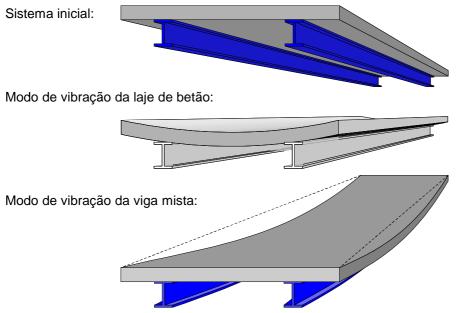


Figura 12: Exemplo de decomposição de um modo de vibração

De acordo com Dunkerley, a frequência natural resultante f do sistema completo é dada por:

$$\frac{1}{f^2} = \frac{1}{f_1^2} + \frac{1}{f_2^2} + \frac{1}{f_3^2} + \dots$$



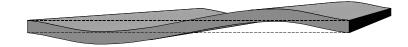
A.6. Aproximação da massa modal

A massa modal pode ser interpretada como a fracção da massa total do pavimento activada quando este oscila com uma determinada configuração modal. Cada modo de vibração é caracterizado por uma frequência natural e pela correspondente massa modal.

A determinação da massa modal carece da determinação do modo de vibração, normalizado relativamente à máxima componente. Atendendo a que a determinação do modo de vibração não pode ser efectuada através de cálculo manual, é habitual recorrer à sua aproximação através de métodos simplificados.

Alternativamente aos métodos de cálculo manual, são frequentemente efectuadas análises através de elementos finitos. Caso o programa de elementos finitos não forneça explicitamente como resultado de uma análise modal a massa modal, pode obter-se uma aproximação do modo de vibração por aplicação de cargas uniformes com sentidos definidos pela configuração esperada (ver Figura 13).

Modo de vibração esperado:



Aplicação de cargas distribuídas:

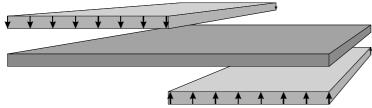


Figura 13: Aplicação de cargas distribuídas para determinação aproximada da configuração do modo de vibração (exemplo)

Se a configuração do modo de vibração puder ser aproximada por uma função normalizada $\delta(x,y)$ (i.e. $|\delta(x,y)|_{max.} = 1,0$), a massa modal correspondente será então dada pela seguinte expressão:

$$M_{mod} = \mu \int_{F} \delta^{2}(x,y) dF$$
em que
 μ representa a massa distribuída do pavimento
 $\delta(x,y)$ é o deslocamento vertical do ponto de coordenadas x,y

Se as deformações que aproximam o modo de vibração forem determinadas por aplicação do método de elementos finitos:



$$M_{mod} = \sum_{Nodes \, i} \delta_i^2 \times dM_i$$

em que

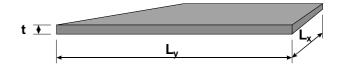
 δ_i é o deslocamento vertical do nó i (normalizado em relação ao deslocamento máximo)

 dM_i é a massa do pavimento associada ao nó i

Se a função $\delta(x,y)$ representar a solução exacta correspondente ao modo de vibração, a equação acima apresentada fornecerá igualmente o valor exacto da massa modal.

Apresentam-se nos próximos parágrafos exemplos de determinação da massa modal através de cálculo manual:

Exemplo 1: Laje simplesmente apoiada nos quatro bordos, L_x~L_y



- Aproximação do primeiro modo de vibração:

$$\delta(x,y) = \sin\left(\frac{\pi \times x}{I_x}\right) \times \sin\left(\frac{\pi \times y}{I_y}\right), \ \left|\delta(x,y)\right|_{\text{max.}} = 1.0$$

Massa distribuída:

$$\mu = \frac{M_{total}}{l_x \times l_y}$$

- Massa modal

$$M_{\text{mod}} = \mu \times \int\limits_{F} \delta^{2}(x,y) \times dF = \frac{M_{\text{total}}}{I_{x} \times I_{y}} \times \int\limits_{I_{y}} \int\limits_{I_{x}} sin^{2} \left(\frac{\pi \times x}{I_{x}}\right) \times sin^{2} \left(\frac{\pi \times y}{I_{y}}\right) \times dx \times dy = \frac{M_{\text{total}}}{4}$$

Exemplo 2: Laje simplesmente apoiada nos quatro bordos, L_x<<L_y



- Aproximação do primeiro modo de vibração:

1.
$$0 \le y \le \frac{l_x}{2} \in l_y - \frac{l_x}{2} \le y \le l_y$$
:
 $f(x,y) = \sin\left(\frac{\pi \times x}{l_x}\right) \times \sin\left(\frac{\pi \times y}{l_y}\right), |f(x,y)|_{\max} = 1,0$

2.
$$\frac{l_x}{2} \le y \le l_y - \frac{l_x}{2}$$
:
$$\delta(x,y) = \sin\left(\frac{\pi \times x}{l_x}\right) \times 1.0 , \left|\delta(x,y)\right|_{\max} = 1,0$$



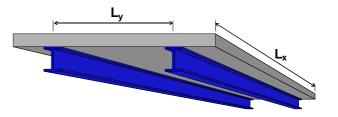
- Massa distribuída:

$$\mu = \frac{M_{total}}{l_x \times l_y}$$

- Massa modal:

$$\begin{split} &M_{\text{mod}} = \mu \times \int_{F} \delta^{2}(x,y) \times dF \\ &= \frac{M_{\text{total}}}{I_{x} \times I_{y}} \times \left[2 \times \int_{0}^{I_{x}} \int_{0}^{y=I_{2}} sin^{2} \bigg(\frac{\pi \times x}{I_{x}} \bigg) \times sin^{2} \bigg(\frac{\pi \times y}{I_{y}} \bigg) \times dx \times dy + \int_{0}^{I_{x}} \int_{0}^{I_{2}-2\frac{I_{x}}{2}} sin^{2} \bigg(\frac{\pi \times x}{I_{x}} \bigg) \times dx \times dy \right] \\ &= \frac{M_{\text{total}}}{4} \times \left(2 - \frac{I_{x}}{I_{y}} \right) \end{split}$$

Examplo 3: Laje armada segundo uma direcção entre vigas, laje e vigas simplesmente apoiadas



- Aproximação do primeiro modo de vibração:

$$\delta(x,y) = \frac{\delta_x}{\delta} \times sin\left(\frac{\pi \times x}{I_x}\right) + \frac{\delta_y}{\delta} \times sin\left(\frac{\pi \times y}{I_y}\right), \ \left|\delta(x,y)\right|_{\text{max.}} = 1.0$$

com

 δ_x = Deslocamento da viga

 δ_y = Deslocamento da laje assumindo ser nula a deformação dos apoios (i.e. o deslocamento da viga)

$$\delta = \delta_x + \delta_y$$

- Massa distribuída:

$$\mu = \frac{M_{total}}{l_x \times l_y}$$

- Massa modal:

$$\begin{split} M_{\text{mod}} &= \mu \times \int_{F} \delta^{2}(x,y) \times dF = \frac{M_{\text{total}}}{I_{x} \times I_{y}} \times \int_{I_{x}} \int_{I_{y}} \left[\frac{\delta_{x}}{\delta} \times sin \left(\frac{\pi \times x}{I_{x}} \right) + \frac{\delta_{y}}{\delta} \times sin \left(\frac{\pi \times y}{I_{y}} \right) \right]^{2} \times dx \times dy \\ &= M_{\text{total}} \times \left[\frac{\delta_{x}^{2} + \delta_{x}^{2}}{2\delta} + \frac{8}{\pi^{2}} \times \frac{\delta_{x} \times \delta_{y}}{\delta^{2}} \right] \end{split}$$



B. Exemplos

B.1. Laje aligeirada com vigas mistas alveolares ACB (edifício de escritórios)

B.1.1. Descrição do pavimento

Neste primeiro exemplo, uma laje aligeirada com vigas mistas alveolares, dotada de um tecto falso e destinada a escritórios sem divisórias ("openspace"), é verificada às acções dinâmicas associadas à deslocação de pessoas em actividade corrente.



Figura 14: Estrutura do edifício

A laje tem um vão de 4.20 entre vigas alveolares e uma espessura total de 160 mm. As vigas principais são vigas alveolares ARCELOR (ACB) com funcionamento misto. Estas vigas encontram-se apoiadas em pilares metálicos de forma contínua. Apresenta-se na Figura 15 a planta do pavimento, assinalando-se a tracejado o painel de laje que é objecto da presente análise dinâmica. A Figura 16 mostra uma ligação viga-pilar.



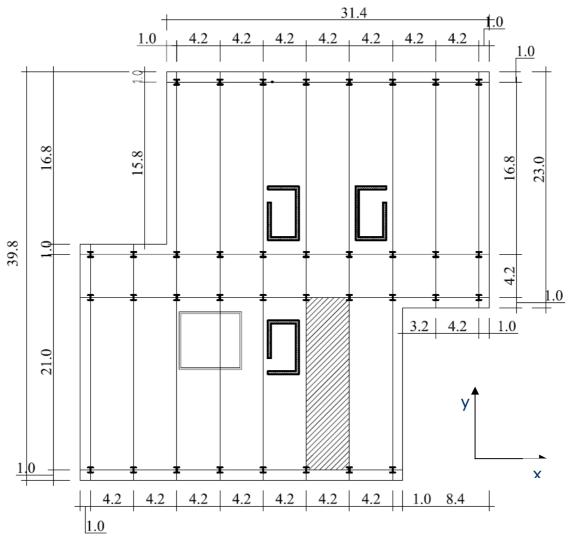


Figura 15: Planta do pavimento

As vigas principais de 16.8m de vão assinaladas nessa Figura são formadas por perfis ACB/HEM400 em aço de classe S460, enquanto que as vigas de 4.2 m de vão são constituídas por perfis ACB/HEM360 em aço S460.

As vigas transversais dispostas segundo a direcção x podem ser ignoradas no presente estudo, já que não contribuem para a distribuição de forças na estrutura.

As propriedades nominais dos materiais são:

- Aço S460: $E_s = 210~000~N/mm^2$, $f_y = 460~N/mm^2$ Betão C25/30: $E_{cm} = 31~000~N/mm^2$, $f_{ck} = 25~N/mm^2$

De acordo com o referido na Secção 4.1.1, o módulo de Young do betão é aumentado para cálculos dinâmicos de acordo com:

$$E_{c,dyn} = 1.1 \times E_{cm} = 34100 \ N / mm^2$$

Hillow

O modo de vibração esperado do painel de pavimento em estudo corresponde à primeira frequência natural e encontra-se esquematizado na Figura 17. Pode concluir-se da análise da configuração deste modo de vibração que, para efeito dos cálculos dinâmicos a desenvolver, a laje se encontra simplesmente apoiada nos quatro bordos. No que respeita às condições fronteira das vigas principais (ver ligação viga-pilar representada na Figura 16), assume-se que, para as pequenas deformações associadas às vibrações, a ligação viga-pilar impede as rotações, i.e., considera-se que as vigas se encontram encastradas nas extremidades.



Figura 16: Ligação viga-pilar

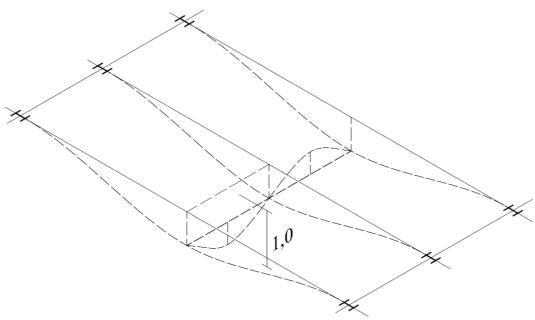


Figura 17: Configuração aproximada do modo de vibração associado à primeira frequência natural do painel de laje em estudo

Hilross

Propriedades das secções transversais:

Laje:

As características mecânicas da laje na direcção global x são:

$$A_{c,x} = 160 \frac{mm^2}{mm}$$

$$I_{c,x} = 3.41 \times 10^5 \frac{mm^4}{mm}$$

- Viga principal:

Admitindo que o primeiro modo de vibração tem a configuração esquematizada na Figura 17, a largura colaborante da viga mista pode ser obtida através da seguinte expressão:

$$b_{\rm eff} = b_{\rm eff,1} + b_{\rm eff,2} = \frac{l_0}{8} + \frac{l_0}{8} = 2 \times \frac{0.7 \times 16.8}{8} = 2.94 \, m$$

As propriedades relevantes da secção transversal da viga principal para estados limite de utilização (sem fendilhação) são as seguintes:

$$A_{a,netto} = 21936mm^2$$

$$A_{abrutto} = 29214 mm^2$$

$$A_i = 98320 mm^2$$

$$I_i = 5.149 \times 10^9 \, mm^4$$

<u>Acções</u>

- Laje:

 Peso próprio (inclui 1.0 kN/m² correspondente ao tecto falso):

$$g_{slab} = 160 \times 10^{-3} \times 25 + 1.0 = 5 \frac{kN}{m^2}$$

Acção variável: Habitualmente recomenda-se um valor característico de 3 kN/m² para pavimentos destinados a escritórios. A fracção correspondente às acções variáveis considerada no cálculo dinâmico é da ordem de 10%, pelo que os efeitos dinâmicos são avaliados para uma força distribuída de

$$q_{slab} = 0.1 \times 3.0 = 0.3 \frac{kN}{m^2}$$

Viga principal:

Peso próprio (inclui 2.00 kN/m para o perfil ACB):

$$g_{beam} = 5.0 \times \frac{4.2}{2} \times 2 + 2.0 = 23.00 \frac{kN}{m^2}$$



Acção variável:

$$q_{slab} = 0.3 \times \frac{4.2}{2} \times 2 = 0.63 \frac{kN}{m^2}$$

B.1.2. Determinação das características dinâmicas do pavimento

Frequência natural

A primeira frequência natural é calculada tendo por base a aproximação com base na deformação devida ao peso próprio. O deslocamento máximo total do pavimento pode ser obtido por sobreposição dos deslocamentos da laje e da viga principal, i.e.

$$\delta_{total} = \delta_{laje} + \delta_{viga}$$

Com

$$\delta_{laje} = \frac{5 \times (5.0 + 0.3) \times 10^{-3} \times 4200^{4}}{384 \times 34100 \times 3.41 \times 10^{5}} = 1.9 \, \text{mm}$$

$$\delta_{viga} = \frac{1 \times (23.0 + 0.63) \times 16800^4}{384 \times 210000 \times 5.149 \times 10^9} = 4.5 \text{mm}$$

O deslocamento total é assim dado por

$$\delta_{total} = 1.9 + 4.5 = 6.4 \, mm$$

A primeira frequência natural é então aproximada por

$$f_1 = \frac{18}{\sqrt{6.4}} = 7.1 \, Hz$$

Massa Modal

A massa total da laje é dada por

$$M_{total} = (5 + 0.3) \times 10^{2} \times 16.8 \times 4.2 = 37397 kg$$

De acordo com o exemplo 3 do Anexo A.6, a massa modal do pavimento pode ser calculada através de

$$M_{\text{mod}} = 37397 \times \left[\frac{1.9^2 + 4.5^2}{2 \times 6.4^2} + \frac{8}{\pi^2} \times \frac{1.9 \times 4.5}{6.4^2} \right] = 17220 kg$$



Amortecimento

O coeficiente de amortecimento da laje mista aço-betão dotada de tecto falso é determinado de acordo com a Tabela 1:

$$D = D_1 + D_2 + D_3 = +1 + 1 + 1 = 3\%$$

com

 $D_1 = 1,0$ (laje mista aço-betão)

 $D_2 = 1,0$ (escritório sem divisórias)

 $D_3 = 1.0$ (tecto falso)

B.1.3. Comportamento dinâmico

Baseado nas propriedades modais calculadas nas secções anteriores, o pavimento pode ser classificado como de classe C (Figura 5). O valor OS-RMS esperado é da ordem de 0.5 mm/s.

De acordo com a classificação da Tabela 1, a classe C é considerada adequada para edifícios de escritórios, pelo que se consideram verificados os requerimentos de conforto.



- B.2. Edifício de escritórios de 3 pisos
- B.2.1. Descrição do pavimento

O pavimento deste edifício de escritórios (Figura 18) tem uma largura de 15 m entre vigas principais, estando apoiado em vigas secundárias formadas por perfis IPE600 afastadas entre si de 2.5m. As vigas principais, formando três vãos de 7.5m entre pilares, são também formadas por perfis IPE600 (ver Figura 19).

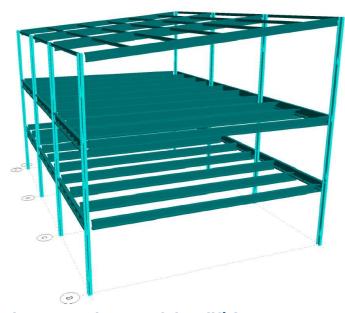


Figura 18: Vista geral do edifício

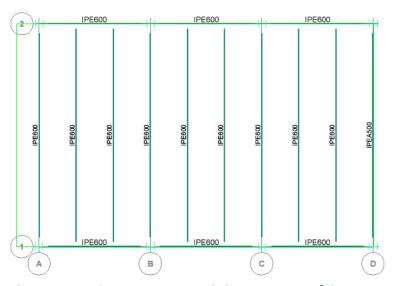


Figura 19: Planta estrutural da parte metálica



O pavimento é formado por uma laje mista de 15 cm de espessura dotada de uma chapa perfilada COFRASTA 70 (Figura 20).

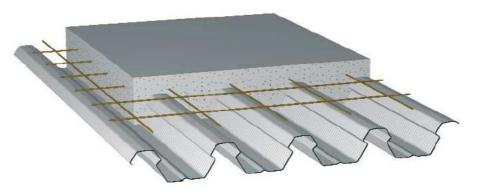


Figura 20: Composição do pavimento misto

As propriedades nominais dos materiais são

- Aço S235: $E_s = 210~000~N/mm^2$, $f_y = 235~N/mm^2$ - Betão C25/30: $E_{cm} = 31~000~N/mm^2$, $f_{ck} = 25~N/mm^2$ $E_{c,dm} = 1.1 \times E_{cm} = 34100~N/mm^2$

Propriedades das secções

- Laje (transversal à viga principal):

A = $1170 \text{ cm}^2/\text{m}$ I = $20 355 \text{ cm}^4/\text{m}$ g = 3.5 kN/m^2 Δq = 0.5 kN/m^2

- Viga mista ($b_{eff} = 2.5m$; $E=210000 \text{ N/mm}^2$):

 $A = 468 \text{ cm}^2$

 $I = 270 089 \text{ cm}^4$

 $g = (3.5+0.5) \times 2.5 + 1.22 = 11.22 \text{ kN/m}^2$

Accões

- Laje (transversal à viga principal):

 $g + \Delta g = 4.0 \text{ kN/m}^2 \text{ (acções permanentes)}$

q = $3.0 \times 0.1 = 0.3 \text{ kN/m}^2$ (10% das acções variáveis)

 $p_{total} = 4.3 \text{ kN/m}^2$

- Viga mista ($b_{eff} = 2.5m$; $E=210000 \text{ N/mm}^2$):

 $g = 11.22 \text{ kN/m}^2$

 $q = 0.3 \times 2.5 = 0.75 \text{ kN/m}$

 $p_{total} = 11.97 \text{ kN/m}$



B.2.2. Determinação das características dinâmicas do pavimento

Condições de apoio

As vigas secundárias apoiam-se nas vigas principais, que são formadas por secções abertas dotadas de uma baixa rigidez torsional. Consideram-se por essa razão simplesmente apoiadas.

Frequência natural

Neste exemplo as condições de apoio são introduzidas de duas formas. A primeira consiste na determinação da frequência natural da viga, assumindo desprezável a rigidez transversal do pavimento. A segunda consiste na aplicação do método baseado na deformação devida ao peso próprio, tendo em conta a rigidez transversal do pavimento.

 Aplicação da fórmula da frequência natural de uma viga simplesmente apoiada (Anexo A.2):

$$p = 11.97 [kN/m] \Rightarrow \mu = 11.97 \times 1000 [kg \ m/s^2/m]/9.81 [m/s^2] = 1220 [kg/m]$$

$$f = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3EI}{0.49 \ \mu l^4}} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{3 \times 210000 \times 10^6 [N/m^2] \times 270089 \times 10^{-8} [m^4]}{0.49 \times 1220 [kg/m] \times 15^4 [m^4]}} = 4,77 \ Hz$$

 Aplicação da fórmula da frequência natural para lajes ortotrópicas (Anexo A.3):

$$f_{1} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{EI_{y}}{m l^{4}}} \sqrt{1 + \left[2\left(\frac{b}{l}\right)^{2} + \left(\frac{b}{l}\right)^{4}\right]} \frac{EI_{x}}{EI_{y}}$$

$$= \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{210000 \times 10^{6} \times 270089 \times 10^{-8}}{1220 \times 15^{4}}} \sqrt{1 + \left[2\left(\frac{2.5}{15}\right)^{2} + \left(\frac{2.5}{15}\right)^{4}\right]} \frac{3410 \times 20355}{21000 \times 270089}$$

$$= 4.76 \times 1.00 = 4,76$$

 Aplicação do método baseado na deformação devida ao peso próprio (Anexo A.4):

$$\begin{split} \delta_{total} &= \delta_{laje} + \delta_{viga} \\ \delta_{laje} &= \frac{5 \times 4.3 \times 10^{-3} \times 2500^4}{384 \times 34100 \times 2.0355 \times 10^5} = 0.3 \, mm \\ \delta_{viga} &= \frac{5 \times 11.97 \times 15000^4}{384 \times 210000 \times 270089 \times 10^4} = 13.9 mm \end{split}$$



$$\delta_{total} = 0.3 + 13.9 = 14.2 \, mm$$

$$\Rightarrow f_1 = \frac{18}{\sqrt{14.2}} = 4.78 \, Hz$$

Massa modal

A determinação da frequência natural acima efectuada mostrou ser aceitável a simplificação relativa à modelação do pavimento através de uma viga simplesmente apoiada. Utiliza-se então esta aproximação na determinação da massa modal:

$$M_{\text{mod}} = 0.5 \ \mu \ l = 0.5 \times 1220 \times 15 = 9150 \ kg$$

Amortecimento

O coeficiente de amortecimento da laje mista aço-betão dotada de tecto falso é determinado de acordo com a Tabela 1:

$$D = D_1 + D_2 + D_3 = +1 + 1 + 1 = 3\%$$

Com

 $D_1 = 1,0$ (laje mista aço-betão)

 $D_2 = 1,0$ (escritórios sem divisórias)

 $D_3 = 1.0$ (tecto falso)

B.2.3. Comportamento dinâmico

Tendo por base as características modais determinadas nas secções anteriores e a Figura 5, conclui-se ser o pavimento em análise de classe D. O valor esperado OS-RMS é dado aproximadamente por 3.2 mm/s.

De acordo com a Tabela 1, considera-se ser a classe D aceitável para edifícios de escritórios, i.e., consideram-se satisfeitos os requisitos de conforto para este pavimento.

